

ВАРИАНТ 3

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 700. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

Ответ. 2 520.

Решение. Ввиду того, что $700 = 7 \cdot 2^2 \cdot 5^2$, искомые числа могут состоять из следующих цифр: (а) две двойки, две пятёрки, одна семёрка и три единицы или (б) четвёрка, две пятёрки, одна семёрка и четыре единицы. Вычислим количество вариантов в каждом случае.

(а) Сначала выбираем два места из восьми для расположения двоек ($C_8^2 = \frac{8!}{2!6!}$ способов), затем два места из шести оставшихся для размещения пятёрок ($C_6^2 = \frac{6!}{4!2!}$ способов), затем одно место из четырёх оставшихся для семёрки ($C_4^1 = 4$ способа). Наконец, оставшиеся места занимают единицы. По правилу произведения выходит $C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot 4 = \frac{8!}{3!2!2!} = 1\,680$ способов.

(б) Рассуждая аналогично, находим, что количество способов в этом случае равно $\frac{8!}{2!4!} = 840$. Окончательно получаем $840 + 1\,680 = 2\,520$ способов.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 50 раз, сумма S увеличится в 10 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 2 раза?

Ответ: увеличится в $\frac{11}{8}$ раз.

Решение. Обозначим знаменатель геометрической прогрессии через q . Так как все её члены положительны, $q > 0$. Если $q = 1$, то $S = 3\,000b_1$, а при увеличении членов с номерами, кратными 3, в 50 раз получим сумму $S + 49(b_3 + b_6 + \dots + b_{3000}) = S + 49 \cdot \frac{S}{3} = \frac{52S}{3}$. Это противоречит условию, следовательно, $q \neq 1$, значит, сумма первых n членов прогрессии может быть посчитана по формуле $S_n = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$. В частности, $S = b_1 \frac{1-q^{3000}}{1-q}$.

При увеличении членов $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$ в 50 раз получаем сумму

$$S + 49(b_3 + b_6 + \dots + b_{3000}) = S + 49b_1 \frac{1 - (q^3)^{1000}}{1 - q^3} = S + 49b_1 q^2 \frac{1 - q^{3000}}{(1 - q)(1 + q + q^2)} = S + \frac{49q^2 S}{1 + q + q^2},$$

которая равна $10S$. Отсюда $\frac{49q^2}{1+q+q^2} = 9$, $40q^2 - 9q - 9 = 0$, $q = \frac{3}{5}$ или $q = -\frac{3}{5}$. Нам подходит положительное значение q , т.е. $q = \frac{3}{5}$.

Если увеличить все члены прогрессии с чётными номерами втрое, получаем

$$S + (b_2 + b_4 + \dots + b_{3000}) = S + b_1 \cdot \frac{1 - (q^2)^{1500}}{1 - q^2} = S + b_1 q \frac{1 - q^{3000}}{(1 - q)(1 + q)} = S + \frac{q}{1 + q} S = \frac{11}{8} S.$$

Значит, сумма S возрастёт в $\frac{11}{8}$ раз.

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \sqrt{x^3 - 4x + 80} = x^2 + 10x + 24$.

Ответ: 4, $\sqrt{13} - 1$.

Решение. Раскладывая правую часть на множители и умножая обе части на $\sqrt{2}$, получаем $(x + 6)\sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2}(x + 4)(x + 6)$. Отсюда есть две возможности: либо $x + 6 = 0$ (тогда $x = -6$, что не подходит по ОДЗ, так как подкоренное выражение отрицательно), либо $\sqrt{x^3 - 4x + 80} = \sqrt{2}(x + 4)$. Решаем последнее уравнение:

$$\begin{cases} x^3 - 4x + 80 = 2(x + 4)^2, \\ x + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 2x^2 - 20x + 48 = 0, \\ x \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 4)(x^2 + 2x - 12) = 0, \\ x \geq -4. \end{cases}$$

Уравнение системы имеет корни $x = 4$, $x = -1 \pm \sqrt{13}$, и из них неравенству удовлетворяют $x = 4$ и $x = -1 + \sqrt{13}$. Это и есть ответ к задаче.

4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 4x - 3x^2|x - 2| + 4 \geq 0$.

Ответ: $(-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4} \right] \cup [1; +\infty)$.

Решение. Неравенство можно переписать в виде $2x^4 + (x - 2)^2 - 3x^2|x - 2| \geq 0$ или $|x - 2|^2 - 3x^2|x + 2| + 2x^4 \geq 0$. Чтобы разложить левую часть на множители, отметим, что она представляет собой квадратный трёхчлен относительно $y = |x - 2|$ с дискриминантом, равным $(3x^2)^2 - 4 \cdot 2x^4 = x^4$. Значит, корни $y_{1,2}$ равны $\frac{3x^2 \pm x^2}{2}$, т.е. $y_1 = x^2$ и $y_2 = 2x^2$, а неравенство принимает вид $(|x - 2| - x^2)(|x - 2| - 2x^2) \geq 0$.

В последнем неравенстве требуется сравнить произведение двух чисел с нулём, поэтому при замене каждого из множителя выражением того же знака мы получим равносильное неравенство. Достаточно отметить, что для неотрицательных чисел A и B знак разности $A - B$ совпадает со знаком разности квадратов $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} ((x - 2)^2 - x^4)((x - 2)^2 - 4x^4) &\geq 0 \Leftrightarrow \\ (x^2 + x - 2)(x^2 - x + 2)(2x^2 + x - 2)(2x^2 - x + 2) &\geq 0 \Leftrightarrow \\ (x^2 + x - 2)(2x^2 + x - 2) &\geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{-1 - \sqrt{17}}{4}; \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} \right] \cup [1; +\infty). \end{aligned}$$

5. [5 баллов] По воде вокруг поплавка против часовой стрелки по двум окружностям скользят водомерка и жук-плавунец. На поверхности воды введена прямоугольная система координат, в которой поплавок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. Скорость водомерки в два раза больше скорости жука. В начальный момент времени водомерка и жук находятся в точках $M_0(-2; -2\sqrt{7})$ и $N_0(5; 5\sqrt{7})$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, при которых расстояние между насекомыми будет кратчайшим.

Ответ: $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}(1 - \sqrt{7}); \frac{5}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{7}) \right), \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{7}); \frac{5}{\sqrt{2}}(1 - \sqrt{7}) \right), \left(\frac{5}{\sqrt{2}}(\sqrt{7} - 1); -\frac{5}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{7}) \right), \left(\frac{5}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{7}); \frac{5}{\sqrt{2}}(\sqrt{7} - 1) \right)$.

Решение. Обозначим точки, в которых находятся водомерка и жук $M(\alpha)$ и $N(\beta)$ соответственно, где α и β – углы, которые образуют радиус-векторы точек M и N с положительным направлением оси абсцисс. Заметим, что угол между $\overrightarrow{AM_0}$ и $\overrightarrow{AN_0}$ равен π , и при этом $-\pi < \alpha_0 < -\frac{\pi}{2}$, $0 < \beta_0 < \frac{\pi}{2}$, где α_0 , β_0 – углы, соответствующие начальным расположениям насекомых.

Расстояние между водомеркой и жуком будет наименьшим тогда, когда угол между векторами $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AN}$ равен нулю. Поскольку $|AM_0| = 4\sqrt{2}$ и $|AN_0| = 10\sqrt{2}$ – это радиусы окружностей, и $|AN_0| = \frac{5}{2}|AM_0|$, то угловая скорость водомерки в 5 раз больше угловой скорости жука.

Пусть к моменту совпадения направления векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AN}$ жук продвинулся на угол ω . Тогда $\alpha + 5\omega = \beta + \omega + 2\pi n$, где $n = 0, 1, \dots$. Следовательно, $\omega = \frac{\beta - \alpha}{4} + \frac{\pi n}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, где $n = 0, 1, \dots$

Различных точек будет четыре (при $n = 0, 1, 2, 3$). Для $n = 0$ получаем $\beta_1 = \beta_0 + \frac{\pi}{4}$. Координаты положения жука найдём по формулам $x_N = 10\sqrt{2} \cos \beta_1$, $y_N = 10\sqrt{2} \sin \beta_1$. Используя координаты точки N_0 , находим $\cos \beta_0 = \frac{x_{N_0}}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ и $\sin \beta_0 = \frac{y_{N_0}}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$. По формулам косинуса и синуса суммы углов получаем

$$\cos \beta_1 = \cos \beta_0 \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin \beta_0 \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{14}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1 - \sqrt{7}}{4},$$

$$\sin \beta_1 = \sin \beta_0 \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos \beta_0 \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{14}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1 + \sqrt{7}}{4}.$$

Отсюда $x_{N_1} = 10\sqrt{2} \cdot \frac{1-\sqrt{7}}{4} = \frac{5}{\sqrt{2}}(1 - \sqrt{7})$, $y_{N_1} = 10\sqrt{2} \cdot \frac{1+\sqrt{7}}{4} = \frac{5}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{7})$.

Остальные точки получаются поворотом точки N_1 вокруг начала координат на углы $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3\pi}{2}$ и имеют, соответственно, координаты

$$\left(-\frac{5}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{7}); \frac{5}{\sqrt{2}}(1 - \sqrt{7})\right), \left(\frac{5}{\sqrt{2}}(\sqrt{7} - 1); -\frac{5}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{7})\right), \left(\frac{5}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{7}); \frac{5}{\sqrt{2}}(\sqrt{7} - 1)\right).$$

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .

Ответ: $CF = 10$, $S_{\triangle ACF} = 7$.

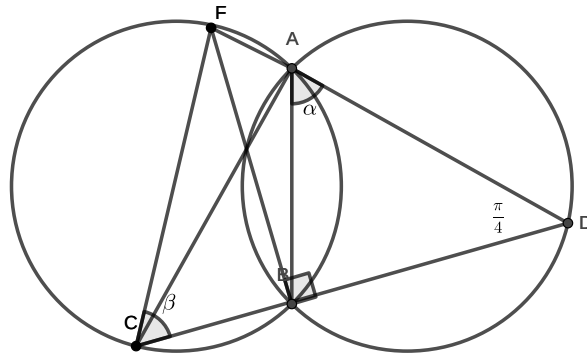


Рис. 1: вариант 3, задача 6

Решение. а) Пусть $R = 5$ – радиусы данных в условии окружностей, $\angle BAD = \alpha$, $\angle BCF = \beta$. Тогда $\angle BAC = \frac{\pi}{2} - \alpha$, и по теореме синусов $BD = 2R \sin \alpha$, $BC = 2R \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = 2R \cos \alpha$. Значит, $CF^2 = BC^2 + BD^2 = 4R^2 \cos^2 \alpha + 4R^2 \sin^2 \alpha = 4R^2$, откуда $CF = 2R = 10$.

б) Так как $\operatorname{tg} \beta = \frac{BF}{BC} = \frac{BD}{BC} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$, то $\beta = \alpha$. Заметим, что $\cos \beta = \frac{BC}{FC} = \frac{3}{5}$, поэтому $\beta > \frac{\pi}{4}$. Далее, углы ADC и ACD вписаны в равные окружности и опираются на одну и ту же хорду AB , поэтому они равны, и из прямоугольного треугольника CAD находим, что $\angle ADC = \angle ACD = \frac{\pi}{4}$. Тогда $\angle ABC = \pi - \frac{\pi}{4} - (\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{\pi}{4} + \alpha$, поэтому $AC = 2R \sin(\frac{\pi}{4} + \alpha)$. Итак, $S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot CA \cdot CF \cdot \sin \angle ACF = \frac{1}{2} \cdot 2R \sin(\frac{\pi}{4} + \alpha) \cdot 2R \sin(\beta - \frac{\pi}{4}) = 2R^2 \sin(\frac{\pi}{4} + \alpha) \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) = -2R^2 \sin(\frac{\pi}{4} + \alpha) \cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) = -R^2 \sin(\frac{\pi}{2} + 2\alpha) = -R^2 \cos 2\alpha = R^2(1 - 2\cos^2 \alpha) = 7$.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y - 6 - x| + |y - 6 + x| = 12, \\ (|x| - 8)^2 + (|y| - 6)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Ответ: $a \in \{4; 100\}$.

Решение. Рассмотрим первое уравнение системы и изобразим множество его решений на координатной плоскости. Для раскрытия модулей найдём множества точек, в которых выражения под модулями обращаются в ноль. Это прямые $y - 6 - x = 0$ и $y - 6 + x = 0$. Они делят плоскость

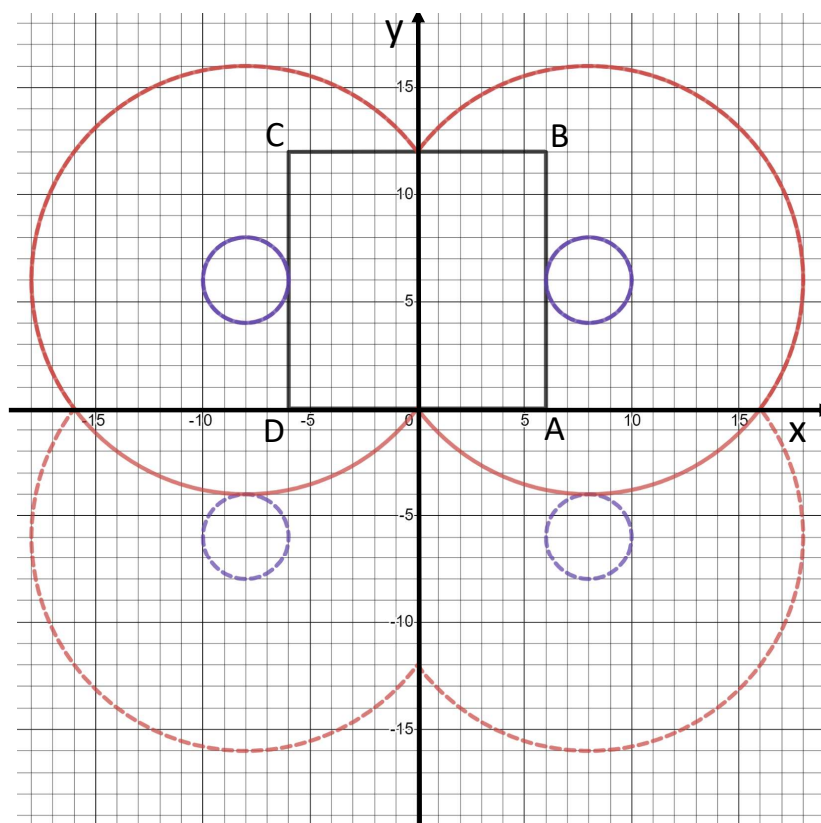


Рис. 2: вариант 3, задача 7

на 4 части, и в каждой из этих частей знаки выражений под модулями постоянны. Чтобы их определить, можно выбрать в каждой из четырёх частей по точке и найти знаки выражений в этих точках. Возьмём область, расположенную снизу от обеих прямых. В ней лежит, например, точка $(0; -10)$. Подстановкой несложно убедиться, что в этой точке оба выражения $y - 6 - x$ и $y - 6 + x$ отрицательны. Таким образом, уравнение принимает вид $-(y - 6 - x) - (y - 6 + x) = 12$, откуда $y = 0$. С учётом рассматриваемых ограничений подходит отрезок с концами в точках $A(6; 0)$ и $D(-6; 0)$. Аналогично рассматриваем остальные три случая, и в итоге получаем границы квадрата K с вершинами в точках $A(6; 0)$, $B(6; 12)$, $C(-6; 12)$ и $D(-6; 0)$. Эта фигура не имеет пересечения с полуплоскостью $y < 0$, поэтому можно считать, что $y \geq 0$. С учётом указанного замечания второе уравнение можно записать в виде $(|x| - 8)^2 + (y - 6)^2 = a$ (опустив модуль у переменной y). Обозначим множество точек, определяемых этим уравнением, через $\Phi(a)$. Если $a < 0$, у уравнения нет решений. При $a = 0$ оно задаёт две точки $(8; 6)$ и $(-8; 6)$. Поскольку обе они не принадлежат квадрату K , система не имеет решений, и значение $a = 0$ не удовлетворяет условию задачи. Перейдём к случаю $a > 0$.

При $x \geq 0$ уравнение принимает вид $(x - 8)^2 + (y - 6)^2 = a$, и мы получаем окружность радиуса $\sqrt{a}$ с центром в точке $(8; 6)$ (или её часть, лежащую в полуплоскости $x \geq 0$, если вся она в этой полуплоскости не помещается). Поскольку уравнение инвариантно относительно замены x на $(-x)$, множество $\Phi(a)$ симметрично относительно оси Oy . Таким образом, $\Phi(a)$ есть совокупность полученной выше окружности (или её части) и окружности, получающейся из уже построенной отражением относительно оси Oy .

Если $0 < a < 4$, график $(|x| - 8)^2 + (y - 6)^2 = a$ не пересекает квадрат K , и система уравнений не имеет решений. Если $a = 4$, система уравнения имеет два решения – точки $X(8; 8)$ и $Y(-8; 8)$. Если $a \in (4, 40]$, дуга окружности $(x - 8)^2 + (y - 6)^2 = a$, $x \geq 0$ пересекает отрезок AB дважды –

эти две точки, а также им симметричные относительно оси Oy , образуют 4 различных решения системы. Если $a \in (40, 100)$, дуга окружности $(x - 8)^2 + (y - 6)^2 = a$, $x \geq 0$ пересекает отрезки DA и CB в двух точках с положительной абсциссой. Аналогично, эти две точки, а также им симметричные относительно оси Oy , образуют 4 различных решения системы. Если $a = 100$, система уравнений имеет два решения – точки $(0; 0)$ и $(0; 12)$. Наконец, если $a > 100$, дуга окружности $(x - 8)^2 + (y - 6)^2 = a$, $x \geq 0$ не пересекает стороны квадрата K и система уравнений не имеет решений. Таким образом, система уравнений имеет ровно два решения только при $a = 4$ и $a = 100$.

ВАРИАНТ 4

1. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 4900. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

Ответ: 4 200.

Решение. Ввиду того, что $4900 = 7^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2$, искомые числа могут состоять из следующих цифр: (а) две двойки, две пятёрки, две семёрки и две единицы или (б) четвёрка, две пятёрки, две семёрки и три единицы. Вычислим количество вариантов в каждом случае.

(а) Сначала выбираем два места из восьми для расположения двоек ($C_8^2 = \frac{8!}{2!6!}$ способов), затем два места из шести оставшихся для размещения пятёрок ($C_6^2 = \frac{6!}{2!4!}$ способов), затем два места из четырёх оставшихся для размещения семёрок ($C_4^2 = \frac{4!}{2!2!}$ способа). Наконец, оставшиеся места занимают единицы. По правилу произведения выходит $C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 = \frac{8!}{2!2!2!2!} \cdot 4 = 2\,520$ способов.

(б) Рассуждая аналогично, находим, что количество способов в этом случае равно $\frac{8!}{2!2!3!} = 1\,680$. Окончательно получаем $2\,520 + 1\,680 = 4\,200$ способов.

2. [4 балла] Дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, \dots, b_{3000}$, все члены которой положительны, а их сумма равна S . Известно, что если все её члены с номерами, кратными 3 (т.е. $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$), увеличить в 40 раз, сумма S увеличится в 5 раз. А как изменится S , если все её члены, стоящие на чётных местах (т.е. $b_2, b_4, \dots, b_{3000}$), увеличить в 3 раза?

Ответ: увеличится в $\frac{11}{7}$ раз.

Решение. Обозначим знаменатель геометрической прогрессии через q . Так как все её члены положительны, $q > 0$. Если $q = 1$, то $S = 3\,000 b_1$, а при увеличении членов с номерами, кратными 3, в 40 раз получим сумму $S + 39(b_3 + b_6 + \dots + b_{3000}) = S + 39 \cdot \frac{S}{3} = 14S$. Это противоречит условию, следовательно, $q \neq 1$, значит, сумма первых n членов прогрессии может быть посчитана по формуле $S_n = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$. В частности, $S = b_1 \frac{1-q^{3000}}{1-q}$.

При увеличении членов $b_3, b_6, \dots, b_{3000}$ в 40 раз получаем сумму

$$S + 39(b_3 + b_6 + \dots + b_{3000}) = S + 39b_3 \frac{1 - (q^3)^{1000}}{1 - q^3} = S + 39b_1 q^2 \frac{1 - q^{3000}}{(1 - q)(1 + q + q^2)} = S + \frac{39q^2 S}{1 + q + q^2},$$

которая равна $5S$. Отсюда $\frac{39q^2}{1+q+q^2} = 4$, $35q^2 - 4q - 4 = 0$, $q = \frac{2}{5}$ или $q = -\frac{2}{7}$. Нам подходит положительное значение q , т.е. $q = \frac{2}{5}$.

Если увеличить все члены прогрессии с чётными номерами втрое, получаем

$$S + 2(b_2 + b_4 + \dots + b_{3000}) = S + 2 \cdot b_2 \cdot \frac{1 - (q^2)^{1500}}{1 - q^2} = S + 2b_1 q \frac{1 - q^{3000}}{(1 - q)(1 + q)} = S + \frac{2q}{1 + q} S = \frac{11}{7} S.$$

Значит, сумма S возрастёт в $\frac{11}{7}$ раз.

3. [4 балла] Решите уравнение $\left(\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \sqrt{x^3 - 64x + 200} = x^2 + 6x - 40$.

Ответ: 6, $\sqrt{13} + 1$.

Решение. Раскладывая правую часть на множители и умножая обе части на $2\sqrt{2}$, получаем $(x + 10)\sqrt{x^3 - 64x + 200} = 2\sqrt{2}(x - 4)(x + 10)$. Отсюда есть две возможности: либо $x + 10 = 0$ (тогда $x = -10$, что не подходит по ОДЗ, так как подкоренное выражение отрицательно), либо $\sqrt{x^3 - 64x + 200} = \sqrt{8}(x - 4)$. Решаем последнее уравнение:

$$\begin{cases} x^3 - 64x + 200 = 8(x - 4)^2, \\ x - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 8x^2 + 72 = 0, \\ x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 6)(x^2 - 2x - 12) = 0, \\ x \geq 4. \end{cases}$$

Уравнение системы имеет корни $x = 6$, $x = 1 \pm \sqrt{13}$, и из них неравенству удовлетворяют $x = 6$ и $x = 1 + \sqrt{13}$. Это и есть ответ к задаче.

4. [6 баллов] Решите неравенство $4x^4 + x^2 + 4x - 5x^2|x + 2| + 4 \geq 0$.

Ответ: $(-\infty; -1] \cup \left[\frac{1-\sqrt{33}}{8}; \frac{1+\sqrt{33}}{8} \right] \cup [2; +\infty)$.

Решение. Неравенство можно переписать в виде $4x^4 + (x + 2)^2 - 5x^2|x + 2| \geq 0$ или $|x + 2|^2 - 5x^2|x + 2| + 4x^4 \geq 0$. Чтобы разложить левую часть на множители, отметим, что она представляет собой квадратный трёхчлен относительно $y = |x + 2|$ с дискриминантом, равным $(5x^2)^2 - 4 \cdot 4x^4 = 9x^4$. Значит, корни $y_{1,2}$ равны $\frac{5x^2 \pm 3x^2}{2}$, т.е. $y_1 = x^2$ и $y_2 = 4x^2$, а неравенство принимает вид $(|x + 2| - x^2)(|x + 2| - 4x^2) \geq 0$.

В последнем неравенстве требуется сравнить произведение двух чисел с нулём, поэтому при замене каждого из множителя выражением того же знака мы получим равносильное неравенство. Достаточно отметить, что для неотрицательных чисел A и B знак разности $A - B$ совпадает со знаком разности квадратов $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} ((x + 2)^2 - x^4)((x + 2)^2 - 16x^4) &\geq 0 \Leftrightarrow \\ (x^2 + x + 2)(x^2 - x - 2)(4x^2 + x + 2)(4x^2 - x - 2) &\geq 0 \Leftrightarrow \\ (x^2 - x - 2)(4x^2 - x - 2) &\geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1 - \sqrt{33}}{8}; \frac{1 + \sqrt{33}}{8} \right] \cup [2; +\infty). \end{aligned}$$

5. [5 баллов] Вокруг крючка с червяком в одной плоскости с ним по двум окружностям плавают карась и пескарь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой крючок (общий центр окружностей) находится в точке $(0; 0)$. В начальный момент времени карась и пескарь находятся в точках $M_0(-1; 2\sqrt{2})$ и $N_0(2; -4\sqrt{2})$ соответственно. Скорость карася в два с половиной раза больше скорости пескаря, оба двигаются по часовой стрелке. Определите координаты всех положений пескаря, при которых расстояние между рыбами будет кратчайшим.

Ответ: $(\sqrt{2} - 4; -4 - \sqrt{2})$, $(-4 - \sqrt{2}; 4 - \sqrt{2})$, $(4 - \sqrt{2}; 4 + \sqrt{2})$, $(4 + \sqrt{2}; \sqrt{2} - 4)$.

Решение. Обозначим точки, в которых находятся карась и пескарь $M(\alpha)$ и $N(\beta)$ соответственно, где α и β – углы, которые образуют радиус-векторы точек M и N с положительным направлением оси абсцисс. Заметим, что угол между $\overrightarrow{AM_0}$ и $\overrightarrow{AN_0}$ равен π , и при этом $\frac{\pi}{2} < \alpha_0 < \pi$, $-\frac{\pi}{2} < \beta_0 < 0$, где α_0 , β_0 – углы, соответствующие начальным расположениям рыб.

Расстояние между карасём и пескарем будет наименьшим тогда, когда угол между векторами $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AN}$ равен нулю. Поскольку $|AM_0| = 3$ и $|AN_0| = 6$ – это радиусы окружностей, и $|AN_0| = 2|AM_0|$, то угловая скорость карася в 5 раз больше угловой скорости пескаря.

Пусть к моменту совпадения направления векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AN}$ пескарь продвинулся на угол ω по часовой стрелке. Тогда $\alpha - 5\omega = \beta - \omega - 2\pi n$, где $n = 0, 1, \dots$. Следовательно, $\omega = \frac{\alpha - \beta}{4} + \frac{\pi n}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, где $n = 0, 1, \dots$

Различных точек будет четыре (при $n = 0, 1, 2, 3$). Для $n = 0$ получаем $\beta_1 = \beta_0 - \frac{\pi}{4}$. Координаты положения пескаря найдём по формулам $x_N = 6 \cos \beta_1$, $y_N = 6 \sin \beta_1$. Используя координаты точки N_0 , находим $\cos \beta_0 = \frac{x_{N_0}}{6} = \frac{1}{3}$ и $\sin \beta_0 = \frac{y_{N_0}}{6} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$. По формулам косинуса и синуса суммы углов получаем

$$\begin{aligned} \cos \beta_1 &= \cos \beta_0 \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin \beta_0 \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 - 2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}, \\ \sin \beta_1 &= \sin \beta_0 \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \cos \beta_0 \cdot \sin \frac{\pi}{4} = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-1 - 2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Отсюда $x_{N_1} = 6 \cdot \frac{1-2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 4$, $y_{N_1} = 6 \cdot \frac{-1-2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = -\sqrt{2} - 4$.

Остальные точки получаются поворотом точки N_1 вокруг начала координат на углы $-\frac{\pi}{2}$, $-\pi$, $-\frac{3\pi}{2}$ и имеют, соответственно, координаты

$(-4 - \sqrt{2}; 4 - \sqrt{2})$, $(4 - \sqrt{2}; 4 + \sqrt{2})$, $(4 + \sqrt{2}; \sqrt{2} - 4)$.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по одну сторону от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .

Ответ: $CF = 26$, $S_{\triangle ACF} = 119$.

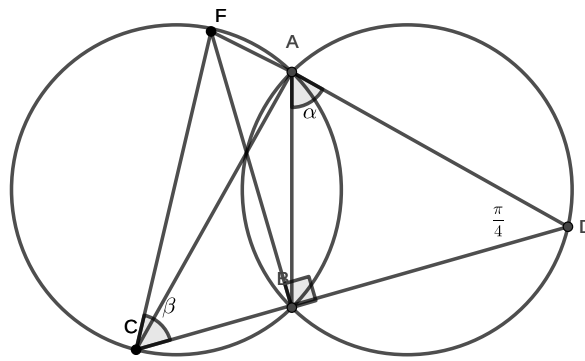


Рис. 3: вариант 4, задача 6

Решение. а) Пусть $R = 13$ – радиусы данных в условии окружностей, $\angle BAD = \alpha$, $\angle BCF = \beta$. Тогда $\angle BAC = \frac{\pi}{2} - \alpha$, и по теореме синусов $BD = 2R \sin \alpha$, $BC = 2R \sin (\frac{\pi}{2} - \alpha) = 2R \cos \alpha$. Значит, $CF^2 = BC^2 + BD^2 = 4R^2 \cos^2 \alpha + 4R^2 \sin^2 \alpha = 4R^2$, откуда $CF = 2R = 26$.

б) Так как $\tan \beta = \frac{BF}{BC} = \frac{BD}{BC} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$, то $\beta = \alpha$. Заметим, что $\cos \beta = \frac{BC}{FC} = \frac{5}{13}$, поэтому $\beta > \frac{\pi}{4}$. Далее, углы ADC и ACD вписаны в равные окружности и опираются на одну и ту же хорду AB , поэтому они равны, и из прямоугольного треугольника CAD находим, что $\angle ADC = \angle ACD = \frac{\pi}{4}$. Тогда $\angle ABC = \pi - \frac{\pi}{4} - (\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{\pi}{4} + \alpha$, поэтому $AC = 2R \sin (\frac{\pi}{4} + \alpha)$. Итак, $S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot CA \cdot CF \cdot \sin \angle ACF = \frac{1}{2} \cdot 2R \sin (\frac{\pi}{4} + \alpha) \cdot 2R \sin (\beta - \frac{\pi}{4}) = 2R^2 \sin (\frac{\pi}{4} + \alpha) \sin (\alpha - \frac{\pi}{4}) = -2R^2 \sin (\frac{\pi}{4} + \alpha) \cos (\alpha + \frac{\pi}{4}) = -R^2 \sin (\frac{\pi}{2} + 2\alpha) = -R^2 \cos 2\alpha = R^2(1 - 2 \cos^2 \alpha) = 119$.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |y + x + 8| + |y - x + 8| = 16, \\ (|x| - 15)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Ответ: $a \in \{49; 289\}$.

Решение. Рассмотрим первое уравнение системы и изобразим множество его решений на координатной плоскости. Для раскрытия модулей найдём множества точек, в которых выражения под модулями обращаются в ноль. Это прямые $y + x + 8 = 0$ и $y - x + 8 = 0$. Они делят плоскость на 4 части, и в каждой из этих частей знаки выражений под модулями постоянны. Чтобы их определить, можно выбрать в каждой из четырёх частей по точке и найти знаки выражений в

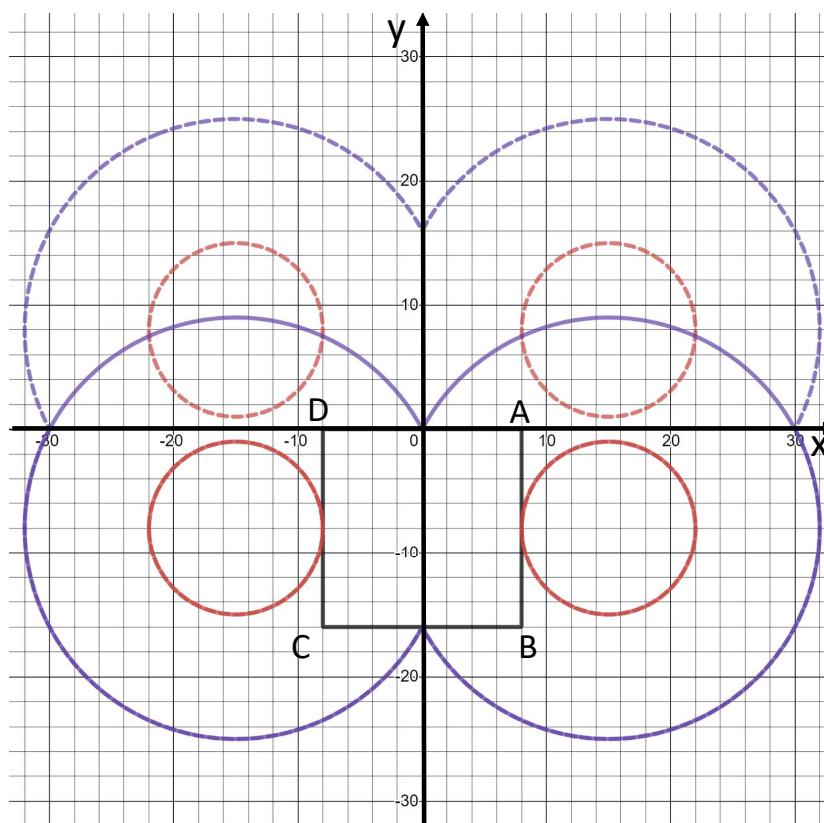


Рис. 4: вариант 4, задача 7

этих точках. Возьмём область, расположенную сверху от обеих прямых. В ней лежит, например, точка $(0; 10)$. Подстановкой несложно убедиться, что в этой точке оба выражения $y + x + 8$ и $y - x + 8$ положительны. Таким образом, уравнение принимает вид $(y + x + 8) + (y - x + 8) = 16$, откуда $y = 0$. С учётом рассматриваемых ограничений подходит отрезок с концами в точках $A(8; 0)$ и $D(-8; 0)$. Аналогично рассматриваем остальные три случая, и в итоге получаем границы квадрата K с вершинами в точках $A(8; 0)$, $B(8; -16)$, $C(-8; -16)$ и $D(-8; 0)$. Эта фигура не имеет пересечения с полуплоскостью $y > 0$, поэтому можно считать, что $y \leq 0$. С учётом указанного замечания второе уравнение можно записать в виде $(|x| - 15)^2 + (y + 8)^2 = a$ (раскрыв модуль у переменной y). Обозначим множество точек, определяемых этим уравнением, через $\Phi(a)$. Если $a < 0$, у уравнения нет решений. При $a = 0$ оно задаёт две точки $(15; -8)$ и $(-15; -8)$. Поскольку обе они не принадлежат квадрату K , система не имеет решений, и значение $a = 0$ не удовлетворяет условию задачи. Перейдём к случаю $a > 0$.

При $x \geq 0$ уравнение принимает вид $(x - 15)^2 + (y + 8)^2 = a$, и мы получаем окружность радиуса $\sqrt{a}$ с центром в точке $(15; -8)$ (или её часть, лежащую в полуплоскости $x \geq 0$, если вся она в этой полуплоскости не помещается). Поскольку уравнение инвариантно относительно замены x на $(-x)$, множество $\Phi(a)$ симметрично относительно оси Oy . Таким образом, $\Phi(a)$ есть совокупность полученной выше окружности (или её части) и окружности, получающейся из уже построенной отражением относительно оси Oy .

Если $0 < a < 49$, график $(|x| - 15)^2 + (y + 8)^2 = a$ не пересекает квадрат K , и система уравнений не имеет решений. Если $a = 49$, система уравнения имеет два решения – точки $X(8; -8)$ и $Y(-8; -8)$. Если $a \in (49, 113]$, дуга окружности $(x - 15)^2 + (y + 8)^2 = a$, $x \geq 0$ пересекает отрезок AB дважды – эти две точки, а также им симметричные относительно оси Oy , образуют 4 различных решения системы. Если $a \in (113, 289)$, дуга окружности $(x - 15)^2 + (y + 8)^2 = a$,

$x \geq 0$ пересекает отрезки DA и CB в двух точках с положительной абсциссой. Аналогично, эти две точки, а также им симметричные относительно оси Oy , образуют 4 различных решения системы. Если $a = 289$, система уравнений имеет два решения – точки $(0; 0)$ и $(0; -16)$. Наконец, если $a > 289$, дуга окружности $(x - 15)^2 + (y + 8)^2 = a$, $x \geq 0$ не пересекает стороны квадрата K и система уравнений не имеет решений. Таким образом, система уравнений имеет ровно два решения только при $a = 49$ и $a = 289$.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует положительного балла за задачу. Верный ответ без обоснования – баллы не добавляются.

За верное обоснованное решение за задачу ставится полное количество баллов (указано в скобках после номера задачи). Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно инструкции. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего.

За арифметическую ошибку, существенно не влияющую на ход решения, снимается 1 балл.

1. **(4 балла)** Разобран только один случай 1 балл (при этом балл ставится, даже если результат в случае не сведён к числу);
разобраны два случая 3 балла (при этом баллы ставятся, даже если результат в случае не сведён к числу);
2. **(4 балла)** Ошибка в формуле суммы членов прогрессии 0 баллов за задачу.
3. **(4 балла)** Уравнение сведено к кубическому 1 балл;
сокращение обеих частей уравнения на линейную функцию произведено без проверки снять 1 балл;
получен хотя бы один лишний корень не более 2 баллов за задачу;
4. **(6 баллов)** [3 балла] При решении рассмотрением двух случаев: по 3 балла за каждый случай;
при другом способе решения: левая часть неравенства разложена на множители 3 балла.
5. **(5 баллов)** Найдены радиусы обеих окружностей и соотношение между угловыми скоростями 2 балла);
составлено уравнение, из которого могут быть выражены искомые координаты 1 балл.
6. **(6 баллов)** Решён пункт а) 2 балла;
решён пункт б) 4 балла;
доказано, что треугольник ACD равнобедренный прямоугольный (или найден один из его острых углов) 1 балл (этот балл может суммироваться с 2 баллами за пункт а));
при решении считается, что точка B – середина CD 0 баллов за дальнейшие рассуждения и не более 1 балла за задачу;
при решении без обоснования считается, что точка A лежит на отрезке DF 0 баллов за задачу.
7. **(6 баллов)** Изображено множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы 2 балла;
если при этом стороны квадрата не параллельны осям координат не более 3 баллов за задачу;
за каждое найденное значение параметра по 2 балла;
в ответ включены лишние значения параметра не более 4 баллов за задачу.